VEKTORSKI AUTOREGRESIONI MODELI I KOINTEGRACIONA ANALIZA

Zorica Mladenović

Teme

1. Prisustvo jediničnog korena u VAR modelu
2. Kointegracija u VAR modelu
3. MA reprezentacija kointegrisanog VAR modela
4. Johansenova procedura
5. Primer

Johansenova metodologija kointegracione analize
Osnovni koraci

- Specifikacija i ocena VAR(p) modela za Y_t.
- Izračunavanje testa količnika verodostojnosti da bi se utvrdio rang matrice Π i odredio broj kointegracionih vektora.
- Normalizacija kointegracionih vektora i nametanje ograničenja na parametre.
- Ocena kointegracionih parametara i VECM.
- Interpretacija determinističkih komponenti.

Specifikacija i ocena VAR(p) modela

- Gotovo svi testovi specifikacije su valjani i za VAR model sa jediničnim korenima nezavisno od toga da li je kointegracija prisutna ili ne.
- Primena Grejndžerovog testa uzročnosti zavisi od toga da li kointegracija postoji ili ne:
  - Kointegracija postoji: koristi se VAR model sa vremenskim serijama u nivou
  - Kointegracija ne postoji: koristi se VAR model sa prvim diferencama vremenskih serija.

Test količnika verodostojnosti u kointegracionoj analizi

- Pretpostavimo da postoji kointegracija. U opštem slučaju broj kointegracionih vektora je *r*. To znači da polaznom kointegrisanom VECM modelu odgovara iskaz: *H(r).*
- Tvrđenje *H(r) sugeriše da je rang matrice Π manji ili jednak r.*
- *Može se postaviti sledeći niz hipoteza, koji predstavlja osnovu za definisanje sekvencijalnog testiranja:*

$$H(0) \subset \ldots \subset H(r) \subset H(r+1) \subset \ldots \subset H(n)$$

$H(0)$: kointegracija ne postoji

$H(n)$: sve su promenljive stacionarne

Test količnika verodostojnosti u kointegracionoj analizi II

- Test se zasniva na ocenjenim karakterističnim vrednostima matrice Π. Slobodno interpretirano, ove karakteristične vrednosti mere korelaciju između ΔY_t i Y_{t-1} nakon što je iz njih izostavljen uticaj kratkoročnih varijacija.
- Što je veća korelacija između ΔY_t i Y_{t-1} to je veća verovatnoća da postoji kointegracija.
- Rang matrice Π odgovara broju karakterističnih vrednosti koje su značajno različite od nule.
- Karakteristične vrednosti:

$$1 > \hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_r > \ldots > \hat{\lambda}_n > 0$$

- Postoje dva tipa Johansenovog testa:
  1. Statistika traga
  2. Statistika najveće karakteristične vrednosti

Test količnika verodostojnosti u kointegracionoj analizi: statistika traga

- Na osnovu statistike traga ostvaruje se diskriminacija između sledećih hipoteza: $H_0 : r = r_0 , H_1 : r > r_0$
- Statistika traga

I Maksimalna vrednost funkcije verodostojnosti uzorka (izuzimajuci konstantne elemente) za rang r_0 (H_0)

$$L_{max}^{-2/T} = |\hat{\Omega}| = |\text{Odredjena matrica}| \prod_{i=1}^{r_0} (1 - \hat{\lambda}_i)$$

II Maksimalna vrednost funkcije verodostojnosti uzorka (izuzimajuci konstantne elemente) za rang n (H_1)

$$L_{max}^{-2/T} = |\hat{\Omega}| = |\text{Odredjena matrica}| \prod_{i=1}^{n} (1 - \hat{\lambda}_i)$$

Test kolicnika verodostojnosti : test statistika traga

$$-2\ln\left(\frac{L_{max}(H_0)}{L_{max}(H_1)}\right) = -2\ln\left[\frac{\prod_{i=1}^{r_0}(1-\hat{\lambda}_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\hat{\lambda}_i)}\right]^{-T/2}$$

$$\text{test statistika traga} : LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Test količnika verodostojnosti u kointegracionoj analizi: statistika traga

- Statistika traga

$$LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Ako je $\text{rang}(\Pi) = r_0$, onda su vrednosti $\hat{\lambda}_{r_0+1},...,\hat{\lambda}_n$ bliske nuli.

Vrednost $LR_{trace}(r_0)$ je zanemarljivo mala, jer $\ln(1 - \hat{\lambda}_i) \approx 0$ za $i > r_0$.

Ako je $\text{rang}(\Pi) > r_0$, onda su neke od vrednosti $\hat{\lambda}_{r_0+1},...,\hat{\lambda}_n$ razlicite od nule.

Vrednost $LR_{trace}(r_0)$ ce biti znatno veca od nule, jer $\ln(1 - \hat{\lambda}_i) < 0$ za neko $i > r_0$.

- U uslovima validnosti nulte hipoteze ova statistika nema chi2 raspodelu. U pitanju je višedimenziona verzija raspodele DF testa jediničnog korena koja zavisi od broja zajedničkih stohastičkih trendova n-r_0 i determinističkih komponenti.
- Johansen: asimptotska raspodela
- Ekipa oko Johansena: kriticne vrednosti

Sekvencijalna procedura u primeni Johansenovog testa statistike traga

1. Testiramo hipoteze: $H_0 : r = 0, H_1 : r > 0$
   na osnovu statistike: $\mathrm{LR}_{\mathrm{trace}}(0) = -T \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right)$

- Ako se nulta hipoteza ne odbacuje, tada kointegracija ne postoji.Testiranje se završava.
- Ako se nulta hipoteza odbacuje, onda zaključujemo da postoji bar jedan kointegracioni vektor. Prelazimo na 2.

2. Nastavljamo testiranje da bismo proverili da li je broj kointegracionih vektora tačno jedan ili najmanje dva. Relevantne hipoteze i statistika:

$$H_0 : r = 1, H_1 : r > 1, \ \mathrm{LR}_{\mathrm{trace}}(1) = -T \sum_{i=2}^{n} \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right)$$

- Ako se nulta hipoteza ne odbacuje, tada zaključujemo da postoji tačno jedan kointegracioni vektor. Testiranje se završava.
- Ako se nulta hipoteza odbacuje, onda zaključujemo da postoje bar dva kointegraciona vektora. Testiranje se nastavlja.

3. Sekvencijalni postupak testiranja završava se fazom u kojoj se ne odbacuje nulta hipoteza.

Test količnika verodostojnosti u kointegracionoj analizi: statistika najveće karakteristične vrednosti

- Na osnovu statistike najveće karakteristične vrednosti ostvaruje se diskriminacija između sledećih hipoteza:

$$H_0 : r = r_0, H_1 : r = r_0 + 1$$

- Test statistika:

$$\mathrm{LR}_{\max}(r_0) = -T \ln\left(1 - \hat{\lambda}_{r_0+1}\right)$$

- <u>U uslovima validnosti nulte hipoteze ni ova statistika nema chi2 raspodelu</u>. U pitanju je nestandardna raspodela koja zavisi od broja nekointegrisanih kombinacija n-r_0 i determinističkih komponenti.

Ocena kointegracionih parametara primenom metoda maksimalne verodostojnosti i ostalih parametara VECM

- Ako je ustanovljeno da je rang jednak *r*, tada je potrebno oceniti sledeći VECM:

$$\Delta Y_t = \alpha\beta' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

- Johansen je pokazao da se primenom MMV ocena matrice kointegracionih parametara dobija prema:

$$\hat{\beta} = (\hat{v}_1 \quad \ldots \quad \hat{v}_r)$$

$\hat{v}_i$ je karakteristicni vektor koji odgovara karakteristicnoj vrednosti $\hat{\lambda}_i, i = 1,2,\ldots,r.$

- Pošto se ocene kointegracioni parametri, primena metoda MMV za ostale ocene svodi se na primenu metoda ONK:

$$\Delta Y_t = \alpha\hat{\beta}' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

$$Ocene: \hat{\alpha}, \hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_{p-1}.$$

Ocena kointegracionih parametara primenom metoda maksimalne verodostojnosti i ostalih parametara VECM II

- Faktorizacija $\hat{\Pi} = \hat{\alpha}\hat{\beta}'$ nije jedinstvena. Zbog potrebe ekonomske interpretacije uobičajeno je da se ostvari takvo normiranje parametara kointegracionog vektora kojim se parametru uz promenljivu od interesa dodeljuje vrednost 1.
- Normiran kointegracioni vektor: $\mathrm{vec}(\hat{\beta}_{nrm})$
- Ovakvom transformacijom kointegracionih vektora menja se i ocena α, ali ne i ocena $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$
- Johansen je pokazao da:

$$T\left(\mathrm{vec}(\hat{\beta}_{nrm}) - \mathrm{vec}(\beta_{nrm})\right)$$

asimptotski poseduje raspodelu koja se može označiti kao mešavina normalnih raspodela. Dodatno, ocena je superkonzistentna.

Posledica: za testiranje hipoteze o vrednosti kointegracionog parametra može se koristiti chi2 raspodela.

- Ostale ocene poseduju asimptotski normalnu raspodelu $(\hat{\alpha}, \hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_{p-1})$

Testiranje linearnih ograničenja na parametre

- Često postoji potreba za proverom da li kointegracioni parametar uzima tačno određenu vrednost.

$$H_0 : \beta' = \begin{pmatrix} \beta_0' \\ \phi' \end{pmatrix},$$

β', $r \times n$, polazna kointegraciona matrica

β_0', $s \times n$, matrica koja ukljucuje s ogranicenja nulte hipoteze

ϕ', $(r-s) \times n$, matrica ostalih parametara koji nisu obuhvaceni iskazom nulte hipoteze

- Primenom MMV ocenjuje se VECM dva puta.
  1. Za dato *r*
  2. Za dato *r* i pod ograničenjem nulte hipoteze.
- Valjanost nulte hipoteze proverava se testom količnika verodostojnosti koji asimptotski poseduje chi2 raspodelu sa *s(n-r)* stepeni slobode.
- <u>Aproksimacija chi2 kvadrat raspodelom nije odgovarajuća na uzorcima malog obima (Johansen-ovi rezultati poslednjih godina).</u>

Testiranje linearnih ograničenja na parametre II

$Primer\ 1:$

$n = 3, r = 1$

$$\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3],\ X_t = \begin{bmatrix} cene \\ plate \\ kurs \end{bmatrix},$$

vrednosti promenljiv ih su logaritmov ane

$$\beta_1 cene + \beta_2 plate + \beta_3 kurs = 0$$

$$\Rightarrow cene = -\frac{\beta_2}{\beta_1} plate - \frac{\beta_3}{\beta_1} kurs$$

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_1 cene + \beta_2 plate + \beta_3 kurs = 0 \Rightarrow$$

$$(-\beta_2 - \beta_3) cene + \beta_2 plate + \beta_3 kurs = 0$$

$$(plate - cene)\beta_2 + (kurs - cene)\beta_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Postoji kointegrac ija izmedju realnih plata i realnog kursa.

Ogranicenj e H_0 se zapisuje kao :

$$\beta = H\varphi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_2 - \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Testiranje linearnih ograničenja na parametre III

Pr imer **2 *:***

$n = 3, r = 1$

$$\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3], X_t = \begin{bmatrix} cene \\ plate \\ kurs \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 cene + \beta_2 plate + \beta_3 kurs = 0$$

H_0 ***:*** $\beta_3 = 0 \Rightarrow$ **kurs ne pripada relaciji**

Ogranicenje H_0 **se zapisuje kao :**

$$\beta = H\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Testiranje linearnih ograničenja na parametre: identifikacija kointegracionih vektora

- Svaki kointegracioni vektor treba da poseduje jedinstvenu formu:
  - Ne može se dobiti kao linearna kombinacija preostalih kointegracionih vektora u datom prostoru
  - Ne može se dobiti algebarskom transformacijom bilo kog drugog vektora
- Ako je broj kointegracionih vektora veći od jedan neophodno je identifikovati kointegracioni prostor.
  - To znači da treba utvrditi podskupove promenljivih koje su kointegrisane, što se postiže testiranjem valjanosti ograničenja na pojedine parametre.
  - Pri tome, uslov identifikovanosti mora biti zadovoljen.
- Uslov identifikovanosti ekvivalentan je uslovu identifikovanosti u sistemu simultanih jednačina.
- <u>Kointegracioni skup je invarijantan na dodatna uključivanja novih promenljivih.</u>
  - Ako postoji jedna kointegraciona relacija između, recimo, 3 promenljive, onda ne može postojati i druga u kojoj pored polaznih figurišu i druge promenljive.
  - Uključivanjem novih promenljivih može se eventualno promeniti broj kointegracionih vektora.

Determinističke komponente u:

	vektoru Y_t	VECM ΔY_t	kointegracionom vektoru
1.	----	-----	-----
2.	Konstanta	Konstanta (sa ograničenjem)→→	Konstanta
3.	Linearni trend	Konstanta (bez ograničenja)	----- (Stacionaran oko nenulte srednje vredn.)
4.	Linearni trend	Konstanta (bez ograničenja) i linearni trend (sa ograničenjem) →→	Linearni trend
5.	Kvadratni trend	Konstanta i linearni trend (bez ograničenja)	---- (Trend-stacionaran)

Determinističke komponente I

1. VECM nema deterministickih komponenti

Kointegracioni vektor $\beta' Y_{t-1}$ ima nultu srednju vrednost.

$$\Delta Y_t = \alpha\beta' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

2. U VECM postoji konstanta

Kointegracioni vektor $\beta' Y_{t-1}$ poseduje nenultu srednju vrednost ρ_0 :

$c = \alpha\rho_0$

Interpretacija : konstanta se javlja u VECM pod ogranicenjem pripadanja kointegracionoj relaciji

$$\Delta Y_t = \alpha(\beta' Y_{t-1} + \rho_0) + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

Determinističke komponente II

3. U VECM postoji konstanta

Kointegracioni vektor $\beta' Y_{t-1}$ nema konstantu, te stacionarno oscilira oko nenulte srednje vrednosti.

Interpretacija : konstanta slobodno pripada VECM.

$$\Delta Y_t = c + \alpha\beta' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

4.VECM sadrzi konstantu i linearni trend

Kointegracioni vektor $\beta' Y_{t-1}$ poseduje linearni trend $\rho_1 t$.

Interpretacija : linearni trend pripada VECM pod ogranicenjem ulaska u kointegracionu relaciju : $c_1 t = \alpha\rho_1 t$

$$\Delta Y_t = c + \alpha(\beta' Y_{t-1} + \rho_1 t) + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

Determinističke komponente III

5.VECM sadrzi konstantu i trend

Kointegracioni vektor $\beta' Y_{t-1}$ nema eksplicitno ukljucene deterministicke komponente, ali je samom pretpostavkom rec o stacionarnosti oko trenda.

Interpretacija : konstanta i linearni trend pripadaju VECM bez ogranicenja :

$$\Delta Y_t = c_0 + c_1 t + \alpha\beta' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

Primer kointegracije: testiranje Petrović and Vujošević-Mladenović (2000), Ukupno 139 podataka -- cene, plate, kurs i novac

Nulta hipoteza	Karakteristična vrednost	Statistika traga	Kritična vrednost (Hansen and Juselius, 1995)
H_0: r = 0	0.310	96.52	53.42
H_0: r = 1	0.237	47.87	34.79
H_0: r = 2	0.074	12.44	19.99
H_0: r = 3	0.018	2.32	9.13

- Rezultat: postoje dva kointegraciona vektora
- Napomene:
  - Korišćen je VAR(8) sa konstantom kao delom kointegracione relacije (efektivni uzorak 131)
  - U modelu postoje impulsne veštačke promenljive, kao i sezonske veštačke promenljive.

Primer kointegracije: ocena kointegracionih parametara i parametara prilagođavanja Petrović and Vujošević (2000)

Ocenjeni parametri kointegracionih vektora		
Promenljiva	**Beta1**	**Beta2**
Cene	1	1
Plate	-0.827	0.167
Kurs	-0.273	-0.295
Novac	0.058	-0.986
Konstanta	-4.353	-1.579
Ocenjeni parametri prilagođavanja (t-odnosi su dati u zagradi)		
Jednačina	Alfa 1	Alfa 2
Stopa rasta cena	**-0.310(-4.58)**	**-0.085(-2.388)**
Stopa rasta plata	**0.475(3.06)**	0.045(0.545)
Stopa rasta kursa	-0.095(-0.49)	-0.046(-0.451)
Stopa rasta novca	**-0.687(-3.55)**	**0.536(5.255)**

Primer kointegracije: identifikacija Petrović and Vujošević (2000)

Detektovana su dva vektora

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix}, X_t = \begin{bmatrix} \text{cene} \\ \text{plate} \\ \text{kurs} \\ \text{novac} \end{bmatrix}$$

Imajuci u vidu dobijene rezultate ostvarujemo identifikaciju nametanjem sledecih ogranicenja

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 & \beta_{24} \end{bmatrix}$$

Uslov identifikovanosti je zadovoljen.

Primer kointegracije: ocena pod ograničenjem identifikacije, ali i ograničenja da vektori ne ulaze u jednacinu stope rasta kursa, Petrović and Vujošević (2000)

Ocenjeni parametri kointegracionih vektora		
Promenljiva	**Beta1**	**Beta2**
Cene	1	0
Plate	-0.769	-0.933
Kurs	-0.278	0
Novac	0	1
Konstanta	-4.013	-5.602
Ocenjeni parametri prilagođavanja		
Jednačina	Alfa 1	Alfa 2
Stopa rasta cena	**-0.384(-5.00)**	**0.060(1.71)**
Stopa rasta plata	**0.544(3.10)**	-0.037(-0.46)
Stopa rasta kursa	0	0
Stopa rasta novca	-0.155(-0.71)	**-0.565(-5.66)**
chi2 sa 3 stepena slobode 0.85, p-vrednost 0.84.		

Primer kointegracije: ocena pod ograničenjem identifikacije, ali i pod ograničenjem da vektori ne ulaze u jednačinu stope rasta kursa, Petrović and Vujošević (2000)

Prvi kointegracioni vektor

- Dugoročna veza između: cena, plata i deviznog kursa
- Kointegraciona relacija objašnjava kretanje: cena i plata
- Kointegraciona relacije ne objašnjava kretanje: deviznog kursa. To je slabo egzogena promenljiva u ovom podsistemu. Ona je nosilac zajedničkog stohastičkog trenda.

Drugi kointegracioni vektor

- Dugoročna veza između: plata i novca
- Kointegraciona relacija objašnjava kretanje: novca
- Kointegraciona relacije ne objašnjava kretanje: plata. To je slabo egzogena promenljiva u ovom podsistemu.

» Pitanje: šta su ocene zajedničkih stohastičkih trendova?

Primer kointegracije: identifikacija zajedničkih stohastičkih trendova, Petrović and Vujošević (2000)

Ocenjeni parametri vektora zajedničkih stohastičkih trendova

Promenljiva	Alfa 1 norm	Alfa 2 norm
Cene	0	1
Plate	0	0.71
Kurs	1	0
Novac	0	0.05

Ocenjeni ponderi vektora zajedničkih stohastičkih trendova

Jednačina	Beta 1 norm (tilda) (transponovano)	Beta 2 norm (tilda) (transponovano)
Cene	27.4	25.6
Plate	26.8	25.9
Kurs	24.6	20.7
Novac	25.0	24.2

Interpretacija ocena vektora zajedničkih trendova Petrović and Vujošević (2000)

Prvi vektor zajedničkih stohastičkih trendova

• Neanticipirani slučajni šokovi u deviznom kursu su izvor nestacionarnosti u podsistemu: cene, plate i devizni kurs
• Uticaj se ravnomerno raspoređuje na sve četiri promenljive.

Drugi vektor zajedničkih stohastičkih trendova

• Linearna kombinacija neanticipiranih slučajnih šokova u cenama i platama je izvor nestacionarnosti u podsistemu: plate i novac. Ovim se potvrđuje uticaja šokova na strani ponude na kretanje novca (rast plata, a time i cena).
• Uticaj se ravnomerno raspoređuje na cene, plate i novac.

Moguće varijacije u primeni Johansenove procedure

- Vremenske serije sa dva jedinična korena
- Vremenske serije sa jednim jediničnim korenom
  - uz prisustvo strukturnog loma u kointegracionoj relaciji
  - u VAR modelu u kojem se modeliraju samo endogene promenljive, dok su egzogene prisutne u nivou i sa docnjama kao objašnjavajuće (parcijalni VAR)
  - uz pretpostavku da se parametri prilagođavanja menjaju tokom vremena
  - Itd.
- Razlomljeno integrisane vremenske serije
- Eksplozivne vremenske serije

Primer za praktičan rad:

- Mesečne vremenske serije privrede Srbije (log):
  Period: januar 2005 – maj 2009. godine
  - Cene na malo
  - Devizni kurs
  - Cene nafte na svetskom tržištu
  - Bruto plate